

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «МГТУ»)**

**Методические указания к выполнению
контрольной работы**

Сопротивление материалов
(для всех специальностей и форм обучения)

Разработчик

Каиров Т.В., ст. преподаватель

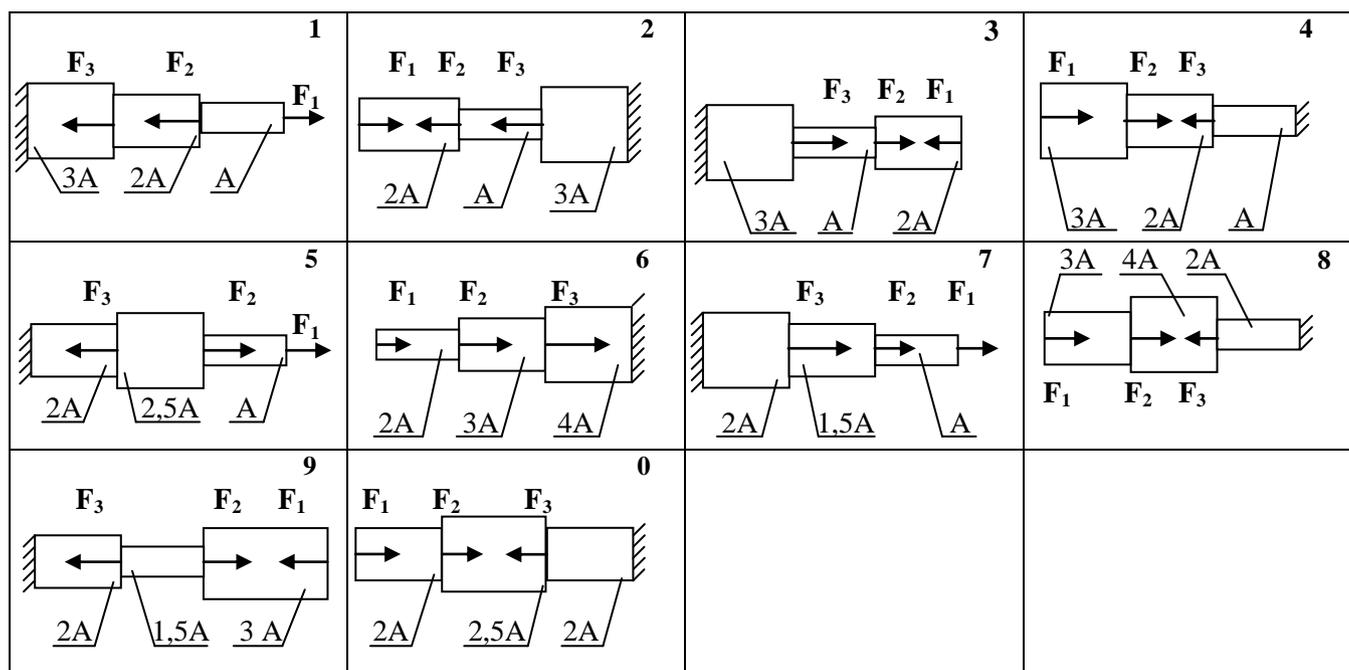
2019

Оглавление

1	Контрольная работа №1 «Растяжение, сжатие».	3
1.1	Пример расчета	3
2	Контрольная работа №2 «Изгиб».	7
2.1	Пример расчета	8
3	Критерии и шкала оценивания контрольной работы.	13
4	Литература.	13

1 Контрольная работа №1 «Растяжение, сжатие».

Построить эпюру продольных сил, определить из условия прочности площадь поперечного сечения A и перемещение свободного конца, приняв модуль Юнга $E = 100$ ГПа.



№ варианта	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	l_1 , см	l_2 , см	l_3 , см	$[\sigma_-]$, МПа	$[\sigma_+]$, МПа
1	20	30	40	40	20	30	100	50
2	50	40	30	30	40	50	125	80
3	60	50	90	50	30	40	160	100
4	40	30	50	50	70	70	200	60
5	30	50	60	40	50	80	100	50
6	40	60	40	30	60	70	125	80
7	50	40	20	90	70	50	160	100
8	60	20	50	50	80	90	200	60
9	70	50	30	70	50	80	160	100
0	80	30	40	80	60	50	200	60

1.1 Пример расчета

Расчет выполнен для стержня, показанного на рис. 1.4.

Материал части стержня с площадью поперечного сечения A – сталь, части с площадью поперечного сечения $2A$ – чугун.

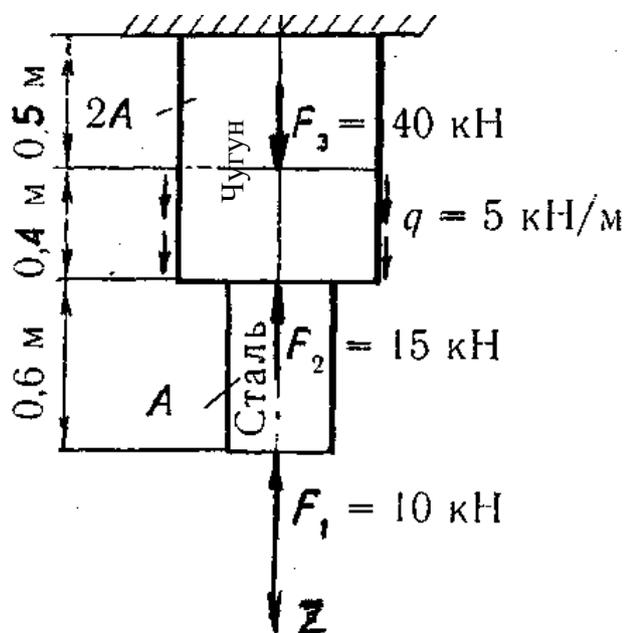


Рис. 1.4

При построении эпюры продольной силы необходимо разделить стержень на участки. В данном случае таких участков три. Определение продольных сил рекомендуется начинать со свободного конца стержня.

I участок: $0 \leq z \leq 0,6$ м.

$$N_1 = -F_1 = -10 \text{ кН (const).}$$

II участок: $0,6 \text{ м} \leq z \leq 1$ м.

$$N_2 = -F_1 - F_2 + q(z_2 - 0,6).$$

$$\text{При } z_2 = 0,6 \text{ м} \quad N_2 = -F_1 - F_2 = -10 - 15 = -25 \text{ кН};$$

$$\text{при } z_2 = 1,0 \text{ м} \quad N_2 = -F_1 - F_2 + q \cdot 0,4 = -10 - 15 + 5 \cdot 0,4 = -23 \text{ кН.}$$

III участок: $1 \text{ м} \leq z \leq 1,5$ м.

$$N_3 = -F_1 - F_2 + q \cdot 0,4 + F_3 = -10 - 15 + 5 \cdot 0,4 + 40 = 17 \text{ кН.}$$

На рис. 1.5 представлены сечения стержня и эпюра продольной силы.

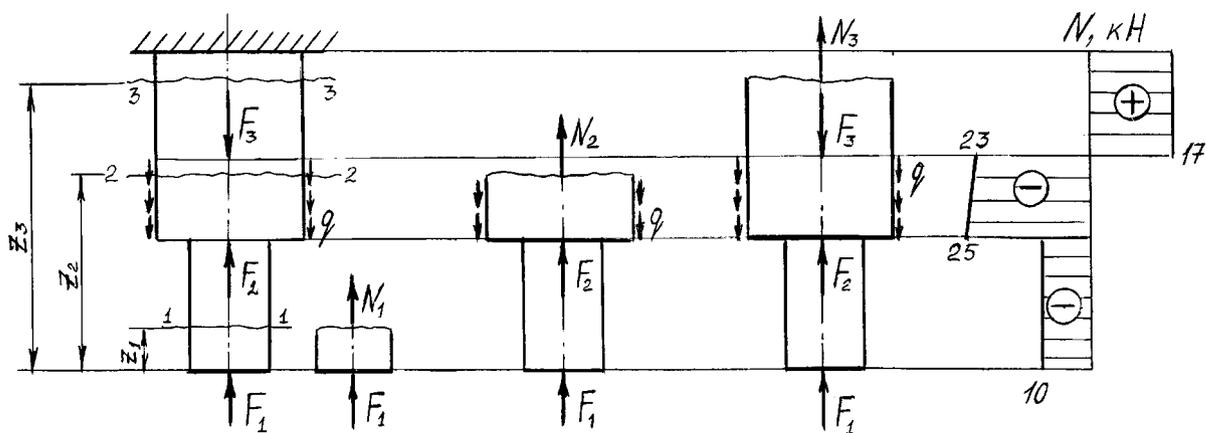


Рис. 1.5

При определении размеров поперечного сечения стержня необходимо воспользоваться условиями прочности:

для стали $|\sigma_{\max}| \leq [\sigma]$;

для чугуна $\sigma_{\max}^p \leq [\sigma_p]$;

$$\sigma_{\max}^c \leq [\sigma_c],$$

где $[\sigma]$, $[\sigma_p]$, $[\sigma_c]$ – допускаемые напряжения.

Значения допускаемых напряжений для стали и чугуна приведены в приложении 1.

Рассмотрим напряжения на участках.

I участок (сталь, сжатие):

$$|\sigma_{\max}| = \frac{N_1}{A} \leq \sigma_{\text{ст}}; \quad \frac{10 \cdot 10^3}{A} \leq 160 \cdot 10^6; \quad A \geq 0,625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

II участок (чугун, сжатие):

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{2\max}}{2A} \leq \sigma_{\text{чуг}}^c; \quad \frac{25 \cdot 10^3}{2A} \leq 190 \cdot 10^6; \quad A \geq 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

III участок (чугун, растяжение):

$$\sigma_{\max}^p = \frac{N_3}{2A} \leq [\sigma_p]_{\text{чуг}}; \quad \frac{17 \cdot 10^3}{2A} \leq 100 \cdot 10^6; \quad A \geq 0,85 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Принято: $A = 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

В зависимости от формы поперечного сечения стержня можно вычислить его размеры (d ; a).

Перемещение свободного конца стержня $\Delta l = -\Delta l_1 - \Delta l_2 + \Delta l_3$.

Перемещения каждого участка стержня определяются по формулам (1.2), (1.3):

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,32 \cdot 10^{-4}} = -2,27 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\begin{aligned} \Delta l_2 &= \int_0^{0,4} \frac{N_2 dz}{E_2 2A} = \int_0^{0,4} \frac{-10 \cdot 10^3 - 15 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^3 \cdot z}{1,2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 1,32 \cdot 10^{-4}} dz = \\ &= \frac{10^3}{3,168 \cdot 10^7} \left(-25z \Big|_0^{0,4} + \frac{5z^2}{2} \Big|_0^{0,4} \right) = -3,03 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \end{aligned}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_3 2A} = \frac{17 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{1,2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 1,32 \cdot 10^{-4}} = 2,68 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

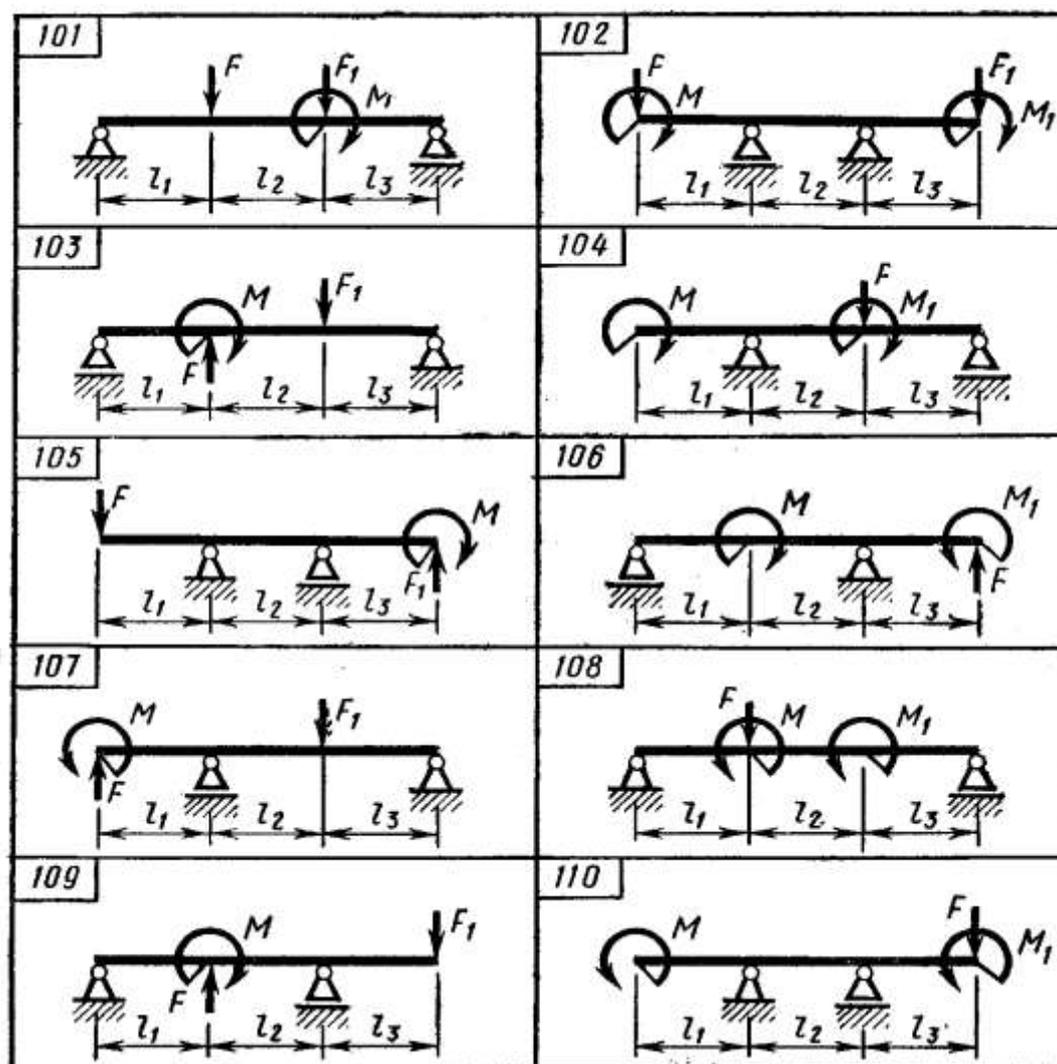
$$\Delta l = -2,27 \cdot 10^{-4} - 3,03 \cdot 10^{-4} + 2,68 \cdot 10^{-4} = -2,62 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Стержень стал короче на $2,62 \cdot 10^{-4}$ м.

2 Контрольная работа №2 «Изгиб».

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Определить условия прочности размеры поперечного сечения. Допускаемое напряжение для материала балки принять равным 160 МПа.

№ варианта	F, кН	F ₁ , кН	M, кНм	M ₁ , кНм	l ₁ , м	l ₂ , м	l ₃ , м	тип сечения
1	10	15	20	10	1,5	2	2,5	круглое
2	15	10	10	20	2	3	3	квадратное
3	5	10	4	9	3	2	1,5	двутавр
4	10	5	9	4	1,5	1,5	2	круглое
5	8	15	5	10	2	2	2,5	квадратное
6	15	8	10	5	3	1,5	2,5	двутавр
7	10	8	9	4	3	2,5	2,5	круглое
8	8	10	4	9	2	3	2,5	квадратное
9	12	8	10	5	2,5	2	2	двутавр
0	8	12	5	10	2,5	3	2	двутавр



2.1 Пример расчета

Расчет выполнен для балки, показанной на рис. 5.4.

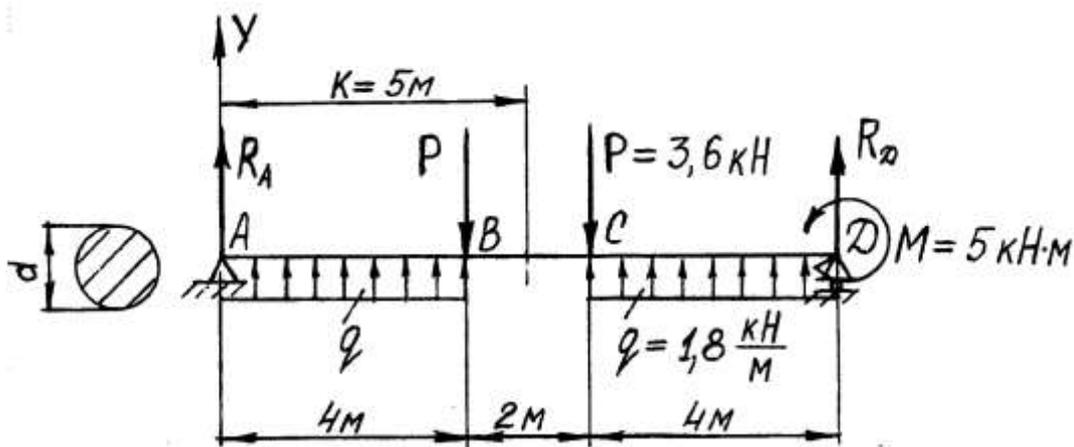


Рис. 5.4

Для построения эпюр M и Q необходимо, чтобы вся внешняя нагрузка, действующая на балку, была известна, поэтому предварительно требуется определить опорные реакции (см. раздел "Статика" курса "Теоретическая механика"):

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = q \cdot 4 \cdot 2 - P \cdot 4 - P \cdot 6 + q \cdot 4 \cdot 8 + M + R_D \cdot 10 = 0;$$

$$\begin{aligned} R_D &= \frac{-q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 4 + P \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 8 - M}{10} = \\ &= \frac{-1,8 \cdot 4 \cdot 2 + 3,6 \cdot 4 + 3,6 \cdot 6 - 1,8 \cdot 4 \cdot 8 - 5}{10} = -4,1 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\sum M_D(\bar{F}_k) = -R_A \cdot 10 - q \cdot 4 \cdot 8 + P \cdot 6 + P \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 + M = 0;$$

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{-q \cdot 4 \cdot 8 + P \cdot 6 + P \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{10} = \\ &= \frac{-1,8 \cdot 4 \cdot 8 + 3,6 \cdot 6 + 3,6 \cdot 4 - 1,8 \cdot 4 \cdot 2 + 5}{10} = -3,1 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверка: $\sum F_{k_y} = 0$;

$$\begin{aligned} \sum F_{k_y} &= R_A + q \cdot 4 - P - P + q \cdot 4 + R_D = -3,1 + 1,8 \cdot 4 - 3,6 - 3,6 + 1,8 \cdot 4 - \\ &- 4,1 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно. Знак "-" указывает на то, что направления реакций R_A и R_D противоположны их направлению, показанному на рис. 5.4. Рекомендуется перед построением эпюр M и Q рисовать на схеме истинное направление опорных реакций, как это сделано на рис. 5.5 и 5.7.

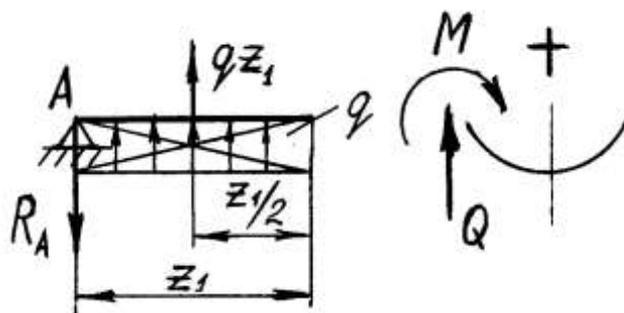


Рис. 5.5

Балка состоит из трех участков.

I участок рассматриваем слева:

$$0 \leq z_1 \leq 4, \quad Q_1 = -R_A + qz_1 - \text{прямая};$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad Q_1 = -R_A = -3,1 \text{ кН};$$

$$\text{при } z_1 = 4 \quad Q_1 = -R_A + q \cdot 4 = -3,1 + 1,8 \cdot 4 = 4,1 \text{ кН};$$

$$M_1 = -R_A z_1 + \frac{qz_1^2}{2} - \text{парабола};$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_1 = 0 \text{ кН};$$

$$\text{при } z_1 = 4 \quad M_1 = -3,1 \cdot 4 + \frac{1,8 \cdot 4^2}{2} = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Так как эпюра поперечной силы на I участке пересекает базовую линию $\left(Q = \frac{dM}{dz} = 0 \right)$, исследуем функцию M на экстремум:

$$\frac{dM}{dz} = -R + qz_1 = 0, \quad z_1 = \frac{R_A}{q} = \frac{3,1}{1,8} = 1,7 \text{ м};$$

$$\text{при } z_1 = 1,7 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad M_1 = -3,1 \cdot 1,7 + \frac{1,8 \cdot 1,7^2}{2} = -2,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На II участке (рис. 5.6) рассматриваем левую отсеченную часть балки:

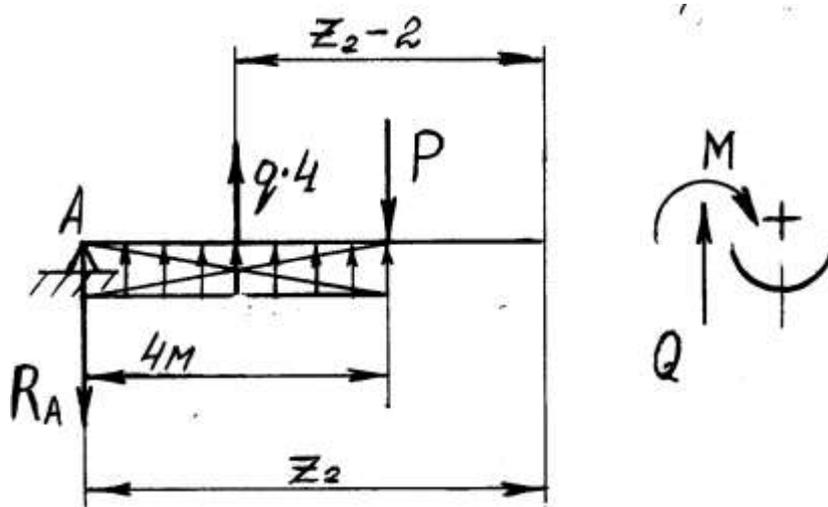


Рис. 5.6

$$4 \leq z_2 \leq 6;$$

$$Q_{II} = -R_A + q \cdot 4 - P - (\text{const});$$

$$Q_{II} = -3,1 + 1,8 \cdot 4 - 3,6 = 0,5 \text{ кН};$$

$$M_{II} = -R_A z_2 + q \cdot 4 z_2 - 2 - P z_2 - 4 - \text{прямая};$$

$$\text{при } z_2 = 4 \quad M_{II} = -R_A \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 - P \cdot 0 = -3,1 \cdot 4 + 1,8 \cdot 4 \cdot 2 - 3,6 \cdot 0 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } z_2 = 6 \quad M_{II} = -R_A \cdot 6 + q \cdot 4 \cdot 4 - P \cdot 2 = -3,1 \cdot 6 + 1,8 \cdot 4 \cdot 4 - 3,6 \cdot 2 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На III участке (рис. 5.7) рассматриваем правую отсеченную часть:

$$0 \leq z_3 \leq 4;$$

$$Q_{III} = R_D - q z_3 - \text{прямая};$$

$$\text{при } z_3 = 0 \quad Q_{III} = R_D = 4,1 \text{ кН};$$

$$\text{при } z_3 = 4 \quad Q_{III} = R_D - q \cdot 4 = 4,1 - 1,8 \cdot 4 = -3,1 \text{ кН}.$$

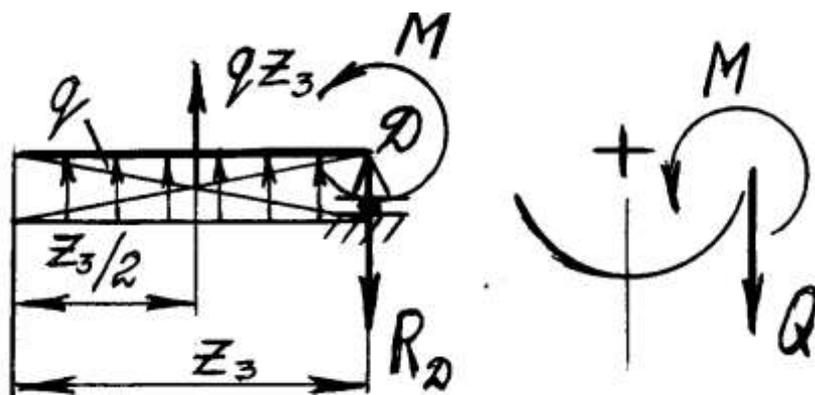


Рис. 5.7

$$M_{III} = -R_D \cdot z_3 + \frac{qz_3^2}{2} + M - \text{парабола};$$

$$\text{при } z_3 = 0 \quad M_{III} = M = 5 \text{ кН};$$

$$\text{при } z_3 = 4 \quad M_{III} = -R_D \cdot 4 + \frac{q \cdot 4^2}{2} + M = -4,1 \cdot 4 + \frac{1,8 \cdot 4^2}{2} + 5 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Исследуем функцию M на экстремум, так как эпюра поперечной силы на III участке пересекает базовую линию:

$$\frac{dM}{dz} = Q = R_D - qz_3 = 0; \quad z_3 = \frac{R_D}{q} = \frac{4,1}{1,8} = 2,3 \text{ м};$$

$$z_3 = 2,3; \quad M_{III} = -4,1 \cdot 2,3 + \frac{1,8 \cdot 2,3^2}{2} + 5 = 0,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным данным строим эпюры M и Q (рис. 5.8).

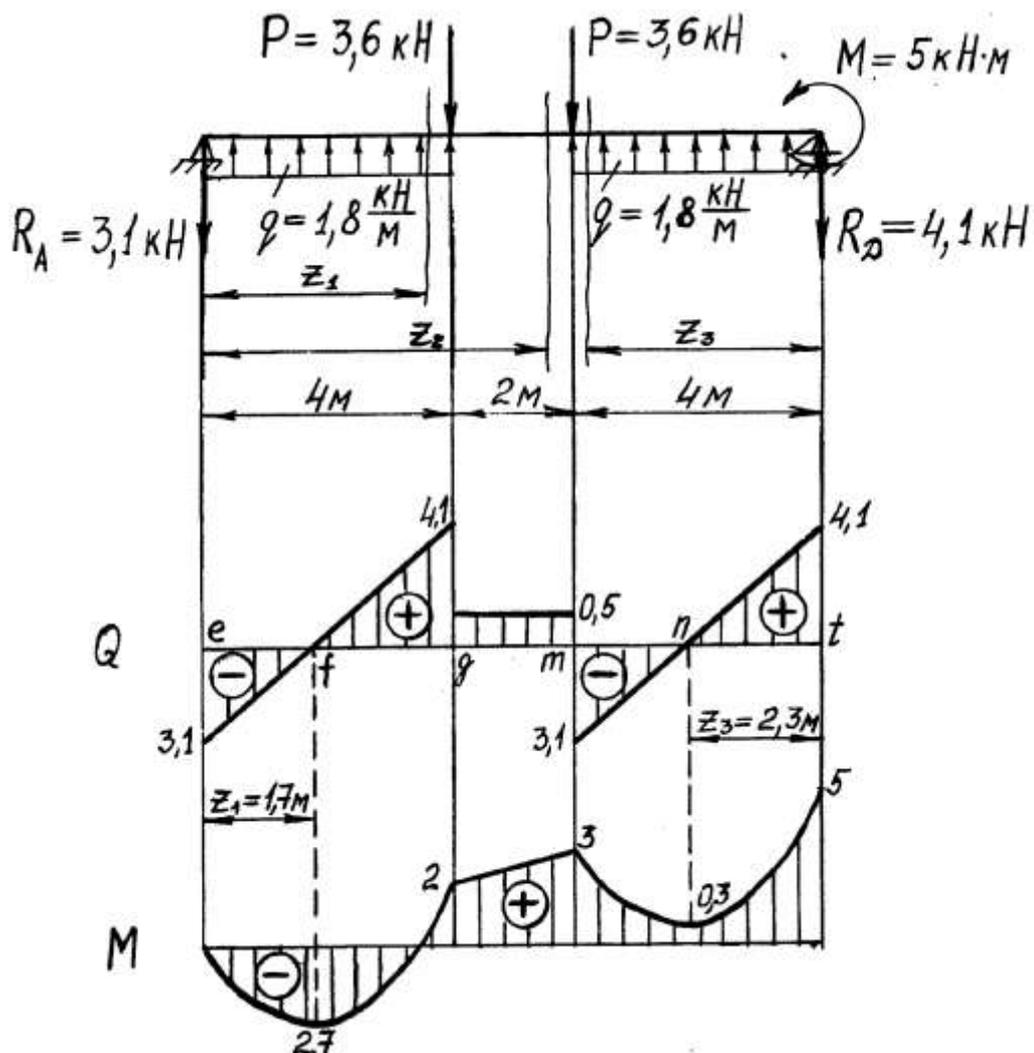


Рис. 5.8

Для проверки правильности построения эпюр необходимо воспользоваться дифференциальными зависимостями

$$Q = \frac{dM}{dz}; \quad q = \frac{dQ}{dz} = \frac{d^2M}{dz^2}$$

и следствиями, вытекающими из них.

Например, из зависимости $Q = \frac{dM}{dz}$ следует, что при возрастании изгибающего момента M поперечная сила Q будет иметь знак "+", при убывании – знак "-". Проверим это соотношение на построенных эпюрах (рис. 5.8). На участках $e-f$ и $m-n$ Q имеет знак "-" и M убывает.

Определим диаметр балки.

Из условия прочности по нормальным напряжениям

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{\sigma}.$$

Так как рассматриваемая балка имеет круглое поперечное сечение, то

$$\frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{M_{\max}}{\sigma},$$

отсюда диаметр балки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi \sigma}}.$$

Из эпюры изгибающих моментов

$$M_{\max} = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}}; \quad d \geq 0,068 \text{ м}.$$

Принимаем $d = 0,068$ м.

Проверим перенапряжение балки:

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma}{\sigma} 100 \%.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{5 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 0,068^3}{32}} = 162 \cdot 10^6 \text{ Па} = 162 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение равно:

$$\frac{162 - 160}{160} 100 \% = 1,25 \%,$$

так как $1,25 \% < 5 \%$, следовательно, допустимо.

3 Критерии и шкала оценивания контрольной работы.

<i>Оценка</i>	<i>Критерии оценки</i>
<i>Отлично</i>	Контрольная работа выполнена полностью, в решении нет ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием непонимания материала).
<i>Хорошо</i>	Контрольная работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна негрубая ошибка или два-три недочета в выкладках или графиках, если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки.
<i>Удовлетворительно</i>	В контрольной работе допущено более одной грубой ошибки или более двух-трех недочета в выкладках или графиках, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.
<i>Неудовлетворительно</i>	В контрольной работе показано полное отсутствие обязательных знаний и умений по проверяемой теме.

4 Литература

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. - М., Наука, 1986.-608 с.
2. Феодосьев В.М. Сопротивление материалов: учеб. для втузов / В. И. Феодосьев. - 10-е изд., перераб. и доп. - Москва : МГТУ им. Н. Э. Баумана , 1999. - 592 с.
3. Степин, П. А. Сопротивление материалов: учебник / П. А. Степин. - Изд. 13-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2014. - 319 с.
4. Дарков, А. В. Сопротивление материалов: учеб. для студентов высш. техн. учеб. заведений : репр. изд. / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. - Изд. 5-е, перераб. и доп. - Москва : Альянс, 2014. - 622, [2] с.
5. Александров А.В. Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин; под ред. А. В. Александрова. - 4-е изд., испр. - Москва : Высш. шк., 2004. - 560 с.
6. Махорин Н.И. . Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. - Мурманск, МГАРФ, 1992.- 199 с.
7. Суднин В.М. Основы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость. - Мурманск, МГАРФ, 1995.- 180с.

8. Сопротивление материалов: пособие по решению задач / И. Н. Миролубов [и др.]. - Изд. 6-е, перераб. и доп. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2004. - 508 с.
9. Афанасьев А.М., Марьин В.А. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. - М., Наука, 1975.-288 с.
10. Ободовский Б.А., Ханин С.Е. Сопротивление материалов в примерах и задачах. - Харьков, Изд-во Харьк. ун-та, 1971.-312 с.